Exposé général géométrie

Emmanuel Royer

Novembre 2025

Remarque importante – Ce document n'est complet qu'accompagné des diapositives diffusées pendant l'exposé.

1 Les prémices de la géométrie

1912, un banquier fameux, John Pierpoint Morgan fait acheter à l'un de ses agent une tablette [1]. Au début du XX^{e}, les fouilles archéologiques ne sont pas menées avec la grande rigueur actuelle. Elles étaient dirigées par des ecclésiastiques, des diplomates ou des militaires, et que ce n'est qu'au tournant du XX^{e} siècle qu'elles sont confiées à des personnes ayant un minimum de connaissance technique des matériaux, l'empereur allemand Guillaume II semblant être le premier à confier, à la fin du XIX^{e} la fouille de Babylone à l'architecte Koldewey. **D. 3**

Bref, la provenance exacte de la tablette et son âge exact sont inconnus, mais sa forme circulaire et l'étude de ce qu'on y lit suggèrent qu'elle a été rédigée par un scribe en apprentissage quelque part dans le sud de la Mésopotamie (Irak actuel), à un moment du premier tiers du deuxième millénaire avant notre ère.

On y voit un carré, sa diagonale et des symboles. Ce sont des chiffres, c'est-à-dire les constituants de nombres. Si l'on sait lire les chiffres des babyloniens, l'interprétation de leurs nombres est problématique puisqu'ils n'utilisent pas d'équivalent de 0 ni de la virgule.

1. Tablette YBC7289

Question

Sans 0, sans virgule comment faites-vous la différence entre

$$1023,4 = 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1},$$

$$123,4 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1},$$

ou encore

$$1234000 = 1\times10^7+2\times10^6+3\times10^5+4\times10^4+0\times10^3+0\times10^2+0\times10^1+0\times10^0.$$

Tous s'écrivent en effet 1234 !

Aujourd'hui, et parce qu'on a vu d'autres tablettes, on imagine que cet élève disposait d'une table de coefficients, qu'il savait que pour mesurer la longueur d'une diagonale d'un carré il faut multiplier le côte de ce carré par la contante qu'on note aujourd'hui $\sqrt{2}$ et trouvait ainsi que la diagonale d'un carré de côté 30 valait environ $42,638$. Comment étaient établies les tables est une autre histoire... **D. 4**

L'état des connaissances des mathématiques grecques est très fragmentaire. Je n'en dis essentiellement rien sinon qu'il s'agit toujours de résoudre des problèmes de répartitions (quantité des récoltes, répartitions des denrées, des surfaces cultivées...). Pour Hérédote (historien et géographe grec autour de 450 avant notre ère), l'intérêt des grecs pour la géométrie vient aussi de ces questions de repartition : « Après les inondations du Nil, comment redistribuer les champs équitablement ? ». La photo représente un fragment du papyrus Rhind [2], cette fois probablement une sorte de livre d'enseignement destiné aux futurs scribes et non un travail d'élève scribe. **D. 5**

L'étude des pyramides et de leurs intérieurs révèlent que les Égyptiens avaient une certaine aisance avec la géométrie. Montrons comment ils calculaient [3] π. **D. 6–10**

2. Acheté par Rhind en 1858 à Louxor et provenant probablement de pillage, son origine exacte est inconnue. Mais le papyrus mentionne son auteur, le scribe Amhes qui vécut vers 1550 avant notre ère. Celui-ci explique qu'il copie des résultats remontant à une date idéntifiée aujourd'hui comme environ 2000 avant notre ère.

3. Ils faisaient probablement le calcul en fixant $2r = 9$ ne sachant en effet pas vraiment manipuler les fractions autre que de la forme $\frac{1}{n}$ et... $\frac{2}{3}$.

Question

Ne trouvez pas que la plus belle propriété de π est son existence ? Quel que soit le cercle que vous choisissez, le rapport entre sa circonférence et son diamètre est le même ! On dit que π est un *invariant* du cercle.

2 Naissance d'une science

Avec la civilisation grecque, les mathématiques cessent de n'être qu'un outil, qu'une technique pour devenir une science *abstraite et déductive* (Platon, Aristote...). Le point culminant, en tout cas celui qui a marqué très fortement le développement des mathématiques, porte le nom d'« Éléments d'Euclide », est un ensemble de treize livres dont on n'est pas sûr s'il furent écrits par Euclide seul où d'un groupe réuni autour de lui. L'image montre un morceau du papyrus Oxyrhynchus, fragment des Éléments. On voit aussi une représentation d'Euclide, du XVI^{e} siècle dont on n'a aucune raison de penser qu'elle soit une représentation fidèle. **D. 12**

Vous ne connaissez probablement pas le premier prix Nobel de littérature (1901) : René-François Sully Prudhomme. J'avoue humblement n'avoir rien lu du poète français que je ne connaissais pas non plus avant de préparer cet exposé. Mais, je vous livre tout de même l'un de ses poèmes, symbole l'importance des Éléments d'Euclide dans l'histoire de l'humanité ! Parce que l'honnêteté intellectuelle guide le scientifique, parfois contre lui ! je me dois cependant de vous lire le dernier paragraphe de l'ode à la poésie (intitulée *La Poésie*, et tirée du recueil « Stances et poèmes » publié en 1865) d'où est tirée la citation que j'affiche : **D. 13**

> Et c'est pourquoi, toute ma vie,
> Si j'étais poète vraiment,
> Je regarderais sans envie
> Képler toiser le firmament !

Le premier livre introduit des définitions. Celles-ci restent très intuitives, reposant sur une perception physique. **D. 14**

Il présente ensuite les règles du jeu (Euclide dit « demandes »), ou postulats. Les trois premiers disent qu'il existe des droites (définir un objet ne garantit en rien son existence !) et des cercles. le quatrième introduit la notion d'orthogonalité. **D. 15**

Mais le véritable héros de cet exposé, qui a intrigué les mathématiciens pendant des siècles avant de profondément bouleverser les mathématiques, c'est le cinquième. **D. 16**

Autre marqueur de la traversée des siècles de ce postulat, l'énoncé équivalent que l'on en donne maintenant est dû au scientifique écossais, John Playfair en 1795. **D. 17**

Remarquons que ce postulat implique que la somme des anges d'un triangle vaut π. Le point essentiel est que, grâce au postulat, on peut tracer une parallèle (en rouge) à la base bleue. Les angles noirs sont égaux ; les angles violets sont égaux ; autour du point du triangle par lequel on a fait passer la parallèle, la sommes des angles noirs, non marqué et violet vaut π. **D. 18**

3 Postulat ou théorème ?

Le cinquième postulat intrigue y compris les contemporains d'Euclide. Il semble plus riche que les quatre premiers, plus compliqué. N'en serait-il pas une conséquence ? ne peut-on pas le remplacer par un énoncé plus simple ? **D. 20**

Les mathématiciens arabes vont jouer un rôle majeur dans l'étude de ce cinquième postulat en essayant de le démontrer par l'absurde : c'est-à-dire en supposant que le cinquième postulat est faux. **D. 21**

Question

Quelle est la négation du cinquième postulat d'Euclide sous sa forme « Par un point extérieur à une droite donnée, il passe une et une seule droite parallèle à la droite donnée » ?

L'échec de ces tentatives sont cependant des avancées conceptuelles majeures dans le sens qu'elles permettent cependant de commencer à imaginer des théories dans lesquelles le cinquième postulat ne serait pas vérifié. **D. 22**

On a vu que le cinquième postulat implique que la somme des angle d'un triangle est π. C'est en fait équivalent et sa négation est donc au moins l'un des deux énoncés suivants : **D. 24**

- il existe un triangle dont la somme des angles est strictement inférieure à π (et alors c'est vrai pour tous les triangles ; c'est l'hypothèse de l'angle aigu, troisième hypothèse de Lambert) ;
- il existe un triangle dont la somme des angles est strictement supérieure à π (et alors c'est vrai pour tous les triangles ; c'est l'hypothèse de l'angle obtu, deuxième hypothèse de Lambert).

Le 30 octobre 1824, Gauss écrit au jeune Taurinus (il est alors âgé de presque 30 ans, Gauss en a 47). La lettre est remarquable ! Taurinus a envoyé à Gauss ses travaux sur les fondements de la géométrie d'Euclide. Gauss a manifestement l'habitude de recevoir de tels travaux de jeunes mathématiciens : « j'ai généralement l'habitude, chez les personnes de votre âge, de ne trouver dans les nouvelles tentatives touchant **D. 25**

la soi-disant théorie des parallèles aucune trace d'un véritable esprit géométrique ». Il explique à Taurinus, fort poliment, que son travail ne tient pas la route : « Je n'ai donc rien (ou pas grand-chose) à redire à votre essai, sinon qu'il est incomplet ». Mais il prend tout de même le temps de détailler ses propres travaux sur le sujet : « **L'hypothèse que la somme des trois angles soit inférieure à 180° conduit à une géométrie propre, entièrement différente de la nôtre (euclidienne), mais parfaitement cohérente en elle-même**, et que j'ai développée pour mon usage personnel d'une manière tout à fait satisfaisante, au point que je peux y résoudre tout problème, à l'exception de la détermination d'une certaine constante que je ne puis obtenir a priori. Plus on choisit cette constante grande, plus la géométrie euclidienne s'en rapproche, et une valeur infinie rend les deux identiques [4]. **Les propositions de cette géométrie semblent en partie paradoxales et inhabituelles au calcul ; mais après un examen attentif et calme, on trouve qu'elles n'ont en réalité rien d'impossible**. Ainsi, par exemple, il n'est pas impossible que les trois angles d'un triangle deviennent aussi petits que l'on veut. (...) Tous mes efforts pour trouver une contradiction ou une défectuosité dans cette géométrie non euclidienne ont été vains, et — chose à peine croyable pour l'intellect — tout semble être fondé, en quelque manière, sur une nature déterminée (bien qu'inconnue de nous) elle-même. Mais cela ne ressort que de ce que montre la nature de la mesure. Ce mot, compris davantage du point de vue des métaphysiciens, montre **combien peu réfléchie est la véritable essence de l'espace, puisque nous ne considérons comme impossible que ce qui nous semble contre nature sous divers aspects**. ».

Le 27 janvier 1829, Carl Friedrich Gauss écrit une longue lettre au physicien allemand [5] Friedrich Wilhelm Bessel. Après s'être plaint du temps que lui prennent ses tâches administratives (il a en particulier la direction des mesures trigonométriques du Hanovre) et avoir faire part de ses doute sur un travail récent de Laplace sur la forme de la surface d'un liquide contenu dans un tube étroit (action capillaire), il explique « J'ai également réfléchi de nouveau, dans quelques rares heures libres, à un autre sujet, qui, chez moi, remonte à près de quarante ans ; je veux parler des premiers fondements de la géométrie ; je ne sais si je vous ai jamais entretenu de mes conceptions à ce propos. Là aussi, j'ai consolidé certaines choses, et ma conviction que nous ne pouvons pas fonder complètement la géométrie a priori est devenue encore plus ferme, si possible. **En attendant, je ne serai probablement pas de sitôt en mesure de mettre au jour mes très vastes recherches sur la question,**

4. Phénomène retrouvé en 1840 par Lobatchevsky

5. Précisément, Gauss vivait dans le Hanovre et Bessel dans le Royaume de Prusse. Ces deux royaumes étaient politiquement indépendants lors de l'écriture de la lettre et jusqu'à la conquête du Hanovre par la Prusse en 1866 précédant la création de l'EMpire allemand en 1871.

et peut-être cela n'arrivera-t-il jamais de mon vivant, car je redoute les clameurs des Béotiens, si je devais exprimer entièrement mon opinion. »

Finalement, les idées sont suffisamment mures pour qu'autour de 1825, et en ignorant chacun les travaux de l'autre, Lobatchevski,, professeur à l'Université de Kazan (empire Russe) et János Bolyai, lieutenant de génie hongrois de l'armée impériale autrichienne établissent et publient des géométries dans lesquelles le cinquième postulat d'Euclide n'est pas satisfait, dans un contexte où existe une infinité de parallèles à une droite donnée passant par un point donné hors de cette droite. Riemann étendra largement l'idée de Gauss de considérer des géométries intrinsèques [6] sur des surfaces dans un espace de dimension trois en considérant des surfaces de dimensions quelconques [7]. **D. 26-27**

Un exemple de géométrie non euclidienne peut-être donné en considérant une sphère. Dans cette géométrie, les points sont ceux d'une sphère fixée, les droites (appelées grands cercles) par une notion de distance. La distance considérée est celle donnée par une marche, sans quitter la surface de la sphère. La droite reliant deux points A et B est le cercle obtenu par intersection de la sphère avec le plan contenant A, B et le centre de la sphère. Sur cette droite, le plus court des arcs de cercle reliant A à B est le plus court de tous les chemins possibles reliant A à B sans quitter la surface de la sphère [8]. Pour être rigoureux, il faut remarquer que l'on ne peut parler de *la* droite reliant A et B que si A et B ne sont pas alignés avec le centre de la sphère. Dans cette configuration, on dit alors que A et B sont antipodaux, il existe toujours une droite reliant A et B mais celle-ci n'est pas unique. **D. 29** **D. 31** **D. 33**

Dans cette géométrie de la sphère, deux droites se croisent toujours [9] ; ;Il ne peut donc pas y avoir de droites parallèles sur la sphère. En particulier, le cinquième postulat d'Euclide ne peut pas être vrai. **D. 33**

Si A, B et C sont trois points distincts sur la sphère [10]. On relie chaque couple de points par le segment le plus court de la droite reliant ces les points de ce couple **D. 34**

6. Par exemple, le repérage sur la Terre en terme de latitide et longitude est un système de coordonnées intrinsèques, indépendantes de l'espace à trois dimensions dans lequel on plonge la planète.

7. On peut imaginer une surface de dimension 4 en se représentant une surface de dimension trois qui évoluerait dans le temps.

8. On appelle géodésique de A et B cet arc.

9. Appelons O le centre de la sphère. Si A, B, C et D sont quatre points distincts de la sphère tels que A et B d'une part, C et D d'autre part définissent deux droites (sphériques) distinctes Les deux plans contenant d'une part A, B et O et d'autre part C, D et O ont un point en commun (le point O) et donc une droite en commun. Cette droite intersecte la sphère en deux points E et F. Ces deux points appartiennent à la fois au plan contenant A, O et B et au plan contenant C, O et D donc ils appartiennent aux deux droites.

10. On suppose qu'aucun couple de ces points n'est un couple de points antipodaux.

pour obtenir un triangle. La somme des angles du triangle obtenu est alors supérieure (strictement) à π.

Cette géométrie n'a rien d'artificiel puisque c'est la géométrie de la planète Terre ! **D. 35**

4 Crise des fondements

Les réflexions sur la rigueur de la géométrie, mais aussi des paradoxes venant de la théorie des ensembles ou le besoin de formaliser des concepts de l'analyse poussent les mathématiciens à repenser les fondements des mathématiques et à se libérer des rapports au monde sensible en fondant toute théorie mathématique par choix d'un ensemble d'objets non définis, dits primitifs [11], et d'un système d'axiomes décrivant les relations entre ces objets et permettant d'en déduire toutes les propositions de la théorie. **D. 38**

L'axiomatisation a ses propres limites, démontrées en particulier par Gödel dès 1931 (théorèmes d'incomplétude). Il démontre que si l'on suppose qu'une théorie (suffisamment riche) est cohérente (c'est-à-dire qu'elle ne peut pas démontrer simultanément un énoncé et son contraire) alors, en n'utilisant que les outils de cette théorie, on ne peut pas démontrer sa cohérence. De plus, dans toute théorie (suffisamment riche), il existe des énoncés dont on ne peut ni montrer qu'ils sont vrais, ni montrer qu'ils sont faux. **D. 39**

5 Les mathématiques sont-elles fausses ?

La géométrie d'Euclide, celle enseignée au collège n'est pas fausse du point de vue de la logique interne. Tarski en 1926 a décrit un système d'axiome qui la fonde. La théorie ansi construite est complète (elle peut démontrer tous les énoncés qu'elle peut énoncer) et cohérente (aucun des énoncés qu'elle produit ne peut être démontré à la fois vrai et faux). Cela n'est pas en contradiction avec les théorèmes d'incomplétude de Gödel : l'axiomatique de Tarski n'est pas assez riche pour entrer dans le cadre de ces théorèmes. Elle ne permet par exemple pas de faire de l'arithmétique. **D. 42**

Si l'on se place d'un point de vue plus empirique, il faut accepter que les mathématiques ne prétendent pas décrire directement le monde sensible. Elles fournissent un cadre formel dans lequel certaines structures du monde peuvent être représentées, analysées et déduites avec rigueur. **D. 43**

La mathématique n'est alors pas une science de la vérité mais une science de la consistance, dont l'objectif est de déduire d'un système d'axiomes tout ce qui est

11. Puisque tout vocabulaire est fini, certains termes doivent nécessairement rester indéfinis.

possible avant de devenir, éventuellement, un outil permettant à l'humanité d'accéder à une vérité sensible, qu'elle peut certes contribuer à rendre visible.

L'étonnement vient alors de la manière précise dont les objets mathématiques correspondent parfois à des phénomènes sensibles.

De façon plus globale, et en considérant des axiomatiques plus riches que celle de Tarski. Pour ces théories, dont ZFC fait partie par exemple, les théorèmes de Gödel prouvent qu'on ne peut pas démontrer qu'elles sont « justes », au sens de la cohérence. Plus précisément, le deuxième théorème d'incomplétude implique que si les mathématiques sont fausses, alors on ne peut pas le démonter. En effet, pour démontrer qu'une théorie est incohérente, il faudrait **D. 44**

— disposer d'un énoncé à la fois vrai et faux ;
— pouvoir démontrer que cet énoncé est vrai ;
— pouvoir démontrer que cet énoncé est faux.

Mais, réussir les deux derniers points nécessite de savoir que la théorie est cohérente...

Références

[Bon17] André Bonnet. « Mathématiques en Mésopotamie, de Sumer à Babylone. » (2017). Présentation d'un stage du plan académique de formation de l'Académie d'Aix-Marseille proposé par l'Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques d'Aix-Marseille. URL : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/IREM_Stage_PAF_28-09-2017.pdf (visité le 18/11/2025).

[Bri91] John P. Britton. « A Table of 4th Powers and Related Texts from Seleucid Babylon ». *Journal of Cuneiform Studies* 43/45 (1991), p. 71-87. ISSN : 0022-0256. DOI : 10.2307/1359847.

[BS12] Janet L. Beery et Frank J. Swetz. « The Best Known Old Babylonian Tablet ? » *Convergence, Mathematical Association of America* 9 (2012). URL : https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/the-best-known-old-babylonian-tablet (visité le 18/11/2025).

[DP86] A. Dahan-Dalmédico et J. Peiffer. *Une histoire des mathématiques : routes et dédales*. Coll. Points. Editions du Seuil, 1986. ISBN : 9782020091381.

[Eve90] Howard Eves. *Foundations and fundamental concepts of mathematics*. 3e éd. Dover Publications, 1990. ISBN : 0-486-69609-X.

[FR98] David Fowler et Eleanor Robson. « Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics : YBC 7289 in Context ». *Historia Mathematica* 25.4 (nov. 1998), p. 366-378. ISSN : 03150860. DOI : 10.1006/hmat.1998.2209.

[Gon21] Emanuel González Álvarez. « Brève Histoire Introductoire des Géométries Non-Euclidiennes pour des Non-Mathématiciens ». Prépublication. Mars 2021. URL : https://shs.hal.science/halshs-03240157 (visité le 18/11/2025).

[Huo05] Jean-Louis Huot. « Les grands travaux des archéologues ». *L'Histoire* 301 (2005). URL : https://www.lhistoire.fr/les-grands-travaux-des-arch%C3%A9ologues (visité le 18/11/2025).

[Leg25] Pierre Legrand. « Élémentaire, mon cher Euclide ! » *Au fil des maths* 557 (Juillet, août, septembre 2025). URL : https://afdm.apmep.fr/rubriques/temps/elementaire-mon-cher-euclide/ (visité le 18/11/2025).

[Mel07] Duncan J. Melville. *Mesopotamian Mathematics*. 2007. URL : https://myslu.stlawu.edu/~dmel/mesomath/index.html (visité le 18/11/2025).

[Rit08] Benoît Rittaud. « À un mathématicien inconnu ! » *BibNum* (2008). ISSN : 2554-4470. URL : http://journals.openedition.org/bibnum/590 (visité le 18/11/2025).